文章编号:1005-3085(2011)02-0206-05

求解无约束优化问题的多维滤子信赖域方法*

孙 莉[1]， 贺国平[2]， 王永丽[2]

(1- 山东农业大学信息科学与工程学院，泰安 271018;

2- 山东科技大学信息科学与工程学院，青岛 266510)

摘 要: 无约束优化问题广泛存在于工程、科学计算等领域．本文提出了修正的多维滤子信赖域算法，将信赖域子问题中柯西步的求解独立出来，一旦发现二次模型非凸，便直接采用柯西点作为下一步迭代点．新算法无需考虑迭代产生的非凸点，编程以及全局收敛性的证明过程较为简洁．最终，数值计算结果表明算法的可行性和有效性.

关键词: 滤子；信赖域方法；柯西点；全局收敛性

分类号: **AMS**(2000) 90C30; 65K10 **中图分类号**: O221.2 **文献标识码**: A

1 引言

近年来，滤子方法是优化研究领域的一个热点．目前，Gould 等人将滤子方法推广到非线性方程组，无约束以及界约束优化问题[1-3]，推广后的多维滤子方法放宽了经典信赖域框架中目标函数值单调性的要求，以及信赖域半径的限制，获得了比较理想的数值结果.

为了有效减少一次迭代中多次求解信赖域子问题，目前有两种策略：一是信赖域方法与线搜索技术相结合，这一方法在试探步不被接受时，便转换到线搜索中的回溯步；二是非单调信赖域方法，典型形式就是要求

$$f(x^{k+1}) \leq \max_{0\leq j\leq M} f(x^{k-j}),$$

这里 M 是个大于零的常数，实质是把单步下降的要求放松为多步下降．中国学者在将非单调技术应用到信赖域框架的工作中做出了重要的贡献[4,5]．经过分析，我们发现 Gould 等人所提出的多维滤子信赖域算法与上述两种策略一样可以有效的减少信赖域子问题的求解次数[6].

我们考虑一般的无约束最优化问题

$$\min_{x\in\mathbf{R}^n} f(x), \tag{1}$$

其中 $f(x)$ 为二阶连续可微的函数．本文对文献 [2] 中的多维滤子信赖域方法作了进一步改进，简化了信赖域子问题的求解以及收敛性的证明过程，获得了一个较为简洁实用的算法形式.

2 算法及其收敛性分析

本文我们将信赖域算法框架中对柯西步的求解独立出来，一旦发现二次模型非凸便直接采用柯西点作为下一步迭代点．这一措施省去了文献 [2] 算法中针对二次模型非凸情形所进行的多次操作.

收稿日期: 2009-01-09. **作者简介**: 孙莉 (1980年8月生)，女，博士，讲师. 研究方向：最优化理论与方法.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10571109; 10901094)；山东省自然科学基金 (Y2008A01).

2.1 几个定义和符号说明

定义 1 (柯西点) 二次模型 $m_k(x_k+s)$ 在第 k 次迭代的柯西点 x_k^C 定义为

$$x_k^C = x_k - t_k^C g_k = \underset{t\geq 0,\, x_k - tg_k \in B_k}{\arg\min}\ m_k(x_k - tg_k). \tag{2}$$

柯西点在信赖域方法的收敛理论中有着至关重要的作用，因为它提供了模型下降量的特征，即

$$m_k(x_k) - m_k(x_k^C) \geq \frac{1}{2}\|g_k\| \min\left[\frac{\|g_k\|}{\beta_k},\, \Delta_k\right], \tag{3}$$

其中

$$\beta_k = 1 + \max_{x\in B_k} \|\nabla^2 m_k(x)\|.$$

定义 2 (支配) 称 x_1 支配 x_2，当且仅当下式成立

$$|g_i(x_1)| \leq |g_i(x_2)| - \gamma_g \|g(x_2)\|, \quad \forall\, i = 1, 2, \cdots, n, \tag{4}$$

其中 $\gamma_g \in (0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ 为一常数.

定义 3 (多维滤子集) 令 $F = (g_{k,1}, \cdots, g_{k,n})_{k\in I}^T$，其中 $g_{k,i} = g_i(x_k)$ 是点 x_k 处梯度向量的第 i 个分量，I 是一个指标集. 若任取 $k,\, l \in I$，都有 $|g_{k,i}| \leq |g_{l,i}| - \gamma_g\|g_l\|$ 对至少一个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 不成立 (x_k, x_l 不互相支配)，即称 F 是由 n 维梯度向量组成的多维滤子集.

定义 4 (可接受) 若对任意的 $g_l \in F$，存在 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，使得 $|g_j(x_k^+)| \leq |g_{l,j}| - \gamma_g\|g_l\|$，则称测试点 x_k^+ 可被多维滤子集 F 接受.

定义 5 (加入) 可接受的多维滤子 $g_k^+ = g(x_k^+)$，其中 $x_k^+ = x_k + s_k$，加入到多维滤子集，当且仅当 $\rho_k < \eta_1$ 或者 $\|s_k\| > \Delta_k$.

多维滤子集方法就是当试探点 x_k^+ 不被多维滤子集 F 中的任意点支配时，即接受试探点 x_k^+ 的方法，此时迭代成功，即 $x_{k+1} = x_k^+$. 一旦 g_k^+ 加入 F，F 中被 g_k^+ 支配的梯度信息将会从 F 中去除，从而实现多维滤子集的更新.

2.2 多维滤子信赖域算法

步 0 选取初始点 x_0 和初始信赖域半径 $\Delta_0 > 0$，常数

$$\gamma_g \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad 0 < \eta_1 < \eta_2 < 1, \quad 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1 \leq \gamma_3$$

以及停机精度 $\varepsilon > 0$. 计算 $f(x_0)$, $g(x_0)$，记 $k = 0$，初始化多维滤子集 F 为空集，设置开关 RESTRICT，并设置 RESTRICT 为关.

步 1 若 $\|g_k\| < \varepsilon$，则停止. 否则根据 (2) 计算柯西点 x_k^C. 此时，若 H_k 正定，则转步 2. 否则 $x_{k+1} := x_k^C$，置 RESTRICT 为关，并转步 5.

步 2 求解信赖域子问题，得满足充分下降条件的试探步 s_k，此时若 RESTRICT 为开，则试探步必须满足

$$\|s_k\| \leq \Delta_k, \quad x_k^+ := x_k + s_k.$$

步 3 计算 $f(x_k^+)$, $g(x_k^+)$ 和比率

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k^+)}{m_k(x_k) - m_k(x_k^+)}.$$

步4 若 x_k^+ 可被多维滤子集接受，则 $x_{k+1} := x_k^+$，置RESTRICT为关．此时，若 $\rho_k < \eta_1$ 或者 $\|s_k\| > \Delta_k$ 成立，则加入 g_k^+ 进多维滤子集 F，并更新 F.

否则，若 $\rho_k \geq \eta_1$ 且 $\|s_k\| \leq \Delta_k$，则 $x_{k+1} := x_k^+$，置RESTRICT为关.

否则，$x_{k+1} := x_k$，置RESTRICT为开.

步5 若 $\|s_k\| \leq \Delta_k$，则取

$$\Delta_{k+1} \in \begin{cases} [\gamma_1\Delta_k, \gamma_2\Delta_k], & \text{当 } \rho_k < \eta_1 \text{ 时}, \\ [\gamma_2\Delta_k, \Delta_k], & \text{当 } \rho_k \in [\eta_1, \eta_2] \text{ 时}, \\ [\Delta_k, \gamma_3\Delta_k], & \text{当 } \rho_k \geq \eta_2 \text{ 时}. \end{cases} \tag{5}$$

否则，$\Delta_{k+1} := \Delta_k$，$k := k+1$，转步1.

2.3 全局收敛性分析

在证明算法的全局收敛性之前，首先给出下列结论.

贯穿本文我们假设 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为二阶连续可微的函数，算法所产生的迭代点列都在 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界闭区域内，对所有的 k, H_k 一致有界，即存在 $\kappa_{umh} > 0$，使 $\|H_k\| \leq \kappa_{umh}$. 此时由文献 [3] 知，若 $\|s_k\| \leq \Delta_k$，则有下式成立

$$f(x_k) - m_k(x_k + s_k) \leq \kappa_{ubh}\Delta_k^2, \tag{6}$$

其中 $\kappa_{ubh} = \max(\kappa_{ufh}, \kappa_{umh})$. 另外若存在常数 $\kappa_{lbg} > 0$，使得 $\|g_k\| \geq \kappa_{lbg}$ 对所有 k 成立，则存在常数 $\kappa_{lbd} > 0$，使得对所有 k，有下式成立

$$\Delta_k \geq \kappa_{lbd}. \tag{7}$$

定理1 假设 f 二阶连续可微，算法所产生的迭代点列 $\{x_k\}$ 都在 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界闭区域内，且对所有的 k, H_k 一致有界，则

$$\lim_{k\to\infty} \inf \|g_k\| = 0. \tag{8}$$

证明 考虑如下三种情形：

1) 多维滤子算法只有有限步成功迭代．设 k_0 为最后一次成功迭代，则对所有的 $j \geq 1$, $x^* = x_{k_0+1} = x_{k_0+j}$. 此时对第 k_0+j 次迭代RESTRICT为开，因此 $\|s_{k_0+j}\| \leq \Delta_{k_0+j}$，$\rho_{k_0+j} < \eta_1$，对任意的 $j \geq 1$ 均成立.

由算法中的步5易知

$$\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0. \tag{9}$$

假设 $g_k \geq \varepsilon > 0$，此时由前面叙述可知 $\Delta_{k_0+j} > \kappa_{lbd}$，与(9)矛盾，故必有 $\|g_{k_0+j}\| = 0$. 从而 x^* 为一阶稳定点.

2) 成功迭代的次数以及加入多维滤子集的迭代次数无限.

(反证) 假定当 k 充分大时，$g_k \geq \kappa_{lbg} > 0$，由假设知 $\{\|g_k\|\}$ 有界，记滤子集中所有指标为 $\{k_i\}$，则存在子序列 $\{k_l\} \subseteq \{k_{i+1}\}$，使得

$$\lim_{l\to\infty} g_{k_l} = g_\infty, \quad \|g_\infty\| \geq \kappa_{lbg}. \tag{10}$$

由 $\{k_l\}$ 的定义，知第 k_l 次迭代点是被多维滤子集所接受的，故对每个 $l > 1$ 都存在一个 $j_l \in \{1, 2, \cdots, n\}$，使得 $|g_{k_l,j_l}| - |g_{k_{l-1},j_l}| \leq -\gamma_g\|g_{k_{l-1}}\|$，则当 l 充分大时，有

$$|g_{k_l,j_l}| - |g_{k_{l-1},j_l}| \leq -\gamma_g\kappa_{lbg}. \tag{11}$$

但由 (10) 式可推知上式左边趋向于零，矛盾，故 (8) 式成立.

3) 成功迭代次数无限，加入多维滤子集的迭代次数有限.

(反证) 假定当 k 充分大时，$\|g_k\| \geq \kappa_{lbg} > 0$. 滤子集中元素有限意味着成功迭代点中，当 k 且充分大时，必有 $\rho_k \geq \eta_1$ 且 $\|s_k\| \leq \Delta_k$ 成立. 定义 $\varsigma_{p,k}$ 为 p 至 k 次成功迭代中，则当 p, k 充分大时，由 (3), (4), (6) 式以及 $\rho_k \geq \eta_1$，有

$$f(x_p) - f(x_{k+1}) = \sum_{j=p, j\in S}^{k} \left[f(x_j) - f(x_{j+1})\right] \geq \varsigma_{p,k}\mu\kappa_{lbg} \min\left[\frac{\kappa_{lbg}}{\kappa_{umh}}, \kappa_{lbd}\right].$$

固定 p 并令 $k \to \infty$，上述不等式右端趋向于 $+\infty$，可推知 $f(x_{k+1})$ 无下界. 与原假设矛盾，从而命题得证.

3　数值测试

算法中的参数选择为 $\mu = 0.1$，$\eta_1 = 0.25$，$\eta_2 = 0.75$，$\gamma_1 = 0.01$，$\gamma_2 = 0.5$，$\gamma_3 = 2$，$\gamma_g = \min(0.001, \frac{1}{\sqrt{n}})$. 算法程序用 Matlab 6.5 程序编写. 设定的终止准则是 $\|g_k\| \leq 10^{-5}$. 表 1 列出了信赖域方法 (TR) 以及采用本文 (FTR1) 和文献 [7] (FTR2) 两种多维滤子技术的信赖域方法求解的数值结果. 表格中 IT, IF, IG 分别表示迭代次数、函数值和梯度的计算次数.

表 1: 测试结果

测试问题	$IT/IF/IG_{TR}$	$IT/IF/IG_{FTR1}$	$IT/IF/IG_{FTR2}$
Rosenbrock 函数	16/53/37	7/29/22	12/41/32
Freudenstein 和 Roth 函数	6/25/19	6/25/19	6/25/19
Powell badly Scaled 函数	>100/383/283	15/52/37	35/113/61
Brown badly Scaled 函数	25/46/22	23/41/19	23/41/19
Beale 函数	11/33/22	14/45/28	13/39/26

可以看出多维滤子技巧的引入使得信赖域算法更加有效和稳定，它使得许多不成功的试探步可以顺利的被接受. 文献 [5] 提出的算法要求迭代所得的试探步满足信赖域半径的限制，即 $\|s_k\| \leq \Delta_k$，$k = 1, 2, \cdots$，此时多维滤子技术的引入只能多接受比值 ρ_k 不满足 $\rho_k > \eta_1$ 条件的试探点. 由本文的数值分析可以看出，试探步 s_k 满足 $\|s_k\| \leq \Delta_k$ 的要求会降低多维滤子信赖域方法的有效性.

表 2 中给出了信赖域方法 (TR) 以及多维滤子信赖域方法 (FTR) 求解 Scaled Rosenbrock 函数的测试结果，通过调整目标函数中的参数 s 可变化函数的等势线. 其中 NS 表示迭代过程中 $\|s^k\| > \Delta_k$ 的次数，$N\rho$ 表示 $\rho_k < \eta_1$ 而迭代成功的次数.

由表 2 的测试结果可以看出，多维滤子技巧的引入使得信赖域算法更加有效和稳定. 特别是等势线呈峡谷状的函数，应用经典的信赖域框架，会导致信赖域半径的不断缩小以及反复的求解信赖域子问题，收敛速度很不理想，而引入多维滤子的信赖域方法其收敛效果得到明显的改善.

表2: 基于 Scaled Rosenbrock 函数的测试结果

s	IT_{TR}	$IF/IG/IH_{BTR}$	IT_{FTR}	NS	$N\rho$	
1	6	25/19/6	6	25/19/6	2	0
10	16	53/37/12	7	29/22/7	2	2
10^2	33	95/61/20	6	25/19/6	2	2
10^3	58	173/115/38	6	21/16/5	3	1
10^4	115	353/238/79	10	37/28/9	6	2
10^5	263	756/499/166	24	89/67/22	14	7

参考文献:

[1] Gould N I M, Leyffer S, Toint P L. A multidimensional filter algorithm for nonlinear equations and nonlinear least-squares[J]. SIAM Journal on Optimization, 2005, 15: 17-38

[2] Gould N I M, Sainvitu C, Toint P L. A filter-trust-region method for unconstrained optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2005, 16: 341-357

[3] Sainvitu C, Toint P L. A filter-trust-region method for simple-bound constrained optimization[J]. Optimization Method and Software, 2007, 22: 835-848

[4] Xiao Y, Zhou F. Nonmonotone trust region method with curvilinear path in unconstrained optimization[J]. Computing, 1992, 48: 303-317

[5] 杨扬, 孙文瑜. 带有线搜索的新的非单调自适应信赖域算法[J]. 工程数学学报, 2007, 24(5): 788-794
Yang Y, Sun W Y. A new nonmonotonic self-adaptive trust region algorithm with line search[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(5): 788-794

[6] Sun L, He G P. A quasi-Newton trust region method based on the multidimensional filter and active set strategy[J]. Mathematica Applicata, 2010, 23(4): 781-787

[7] 缪卫华, 孙文瑜. 一个解无约束优化问题的过滤信赖域方法[J]. 高等学校计算数学学报, 2007, 29(1): 88-96
Miao W H, Sun W Y. A filter trust-region method for unconstrained optimization[J]. Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 2007, 29(1): 88-96

A Multidimensional Filter Trust Region Method for Unconstrained Optimization

SUN Li[1], HE Guo-ping[2], WANG Yong-li[2]

(1- College of Information Science and Engineering,
Shandong Agricultural University, Taian 271018; 2- College of Information Science and Engineering,
Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510)

Abstract: Unconstrained optimization arises in engineering and scientific computing areas. We present a modified filter trust region method. It employs the Cauchy point directly, when the trust region subproblem is nonconvex. Without the consideration of nonconvex points, the algorithm and the global convergence analysis are easier. Numerical results show that the algorithm is efficient and reliable.

Keywords: multidimensional filter; trust region method; Cauchy point; global convergence

Received: 09 Jan 2009. **Accepted:** 29 June 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10571109; 10901094); the Natural Science Foundation of Shandong Province (Y2008A01).